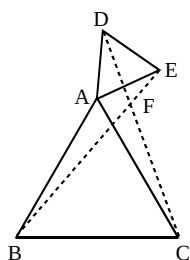


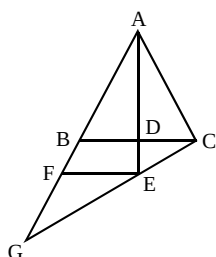
עבודת קיץ – גיאומטריה (5 יחידות)

בעיות עם משולשים ומרובעים (כולל פרופורציה ודמיון)

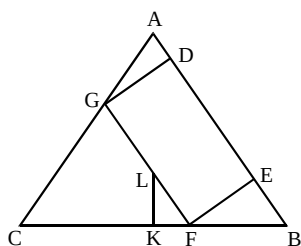


1. המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים שוו-צלעות. הקטעים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.
 א. הוכח: $BE = CD$.
 ב. הוכח: $\angle ACD = \angle ABE$.
 ג. חשב את הזווית BFC.

תשובה: ג. 60° .

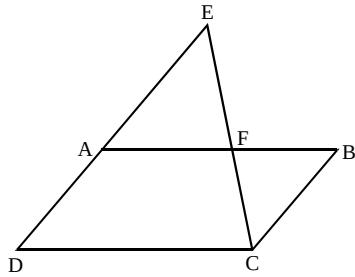


2. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$). הנקודה G היא נקודה על המשך הצלע AB. הקטע FE מקביל ל- BC. נתון: $\frac{GF}{BF} = \frac{AG}{AC}$. הוכח: $AE \perp BC$.



3. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מלבן GFED (ראה ציור). נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF, היא מפגש התיכונים במשולש ABC. דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC, החותך את BC בנקודה K. א. הוכח: $\triangle KAB \sim \triangle KLF \sim \triangle EFB$.
 ב. נתון: $BC = 18$ ס"מ, $AB = 15$ ס"מ. חשב את אורכי הקטעים KF ו- EF.

תשובה: ב. 3 ס"מ, 4.8 ס"מ.



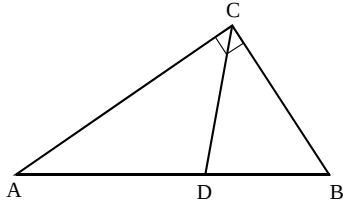
4. המרובע ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).

א. הוכח: $\frac{BF}{FA} = \frac{AD}{AE}$.

ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}$

(2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1),

והוכח: $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BEF}$.



5. במשולש ישר-זווית ACB ($\angle ACB = 90^\circ$)

CD חוצה-זווית ACB (ראה ציור).

א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$.

(2) נתון: $BC = 21$ מ"מ, $AC = 28$ מ"מ.

חשב את האורך של הקטע DB.

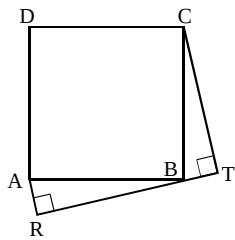
ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB.

האנך חותך את היתר

בנקודה N. הוכח כי $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$.

ג. חשב את האורך של הקטע DN.

תשובה: א. (2) 15 מ"מ. ג. 2.4 מ"מ.



6. נתון ריבוע ABCD.

דרך הקדקוד B העבירו ישר TR.

AR ו-CT מאונכים לישר זה (ראה ציור).

א. הוכח כי $AR + CT = TR$.

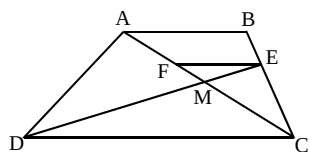
ב. הבע את שטח המרובע ACTR באמצעות TR.

תשובה: ב. $\frac{1}{2}(TR)^2$.

7. הוכח: אורך התיכון במשולש קטן מהממוצע של אורכי שתי הצלעות

שלידו. הדרכה: הארך את התיכון כאורכו.

8. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) מתקיים $DC = 2AB$. הנקודה E נמצאת על השוק BC כך ש- $BC = 3BE$.



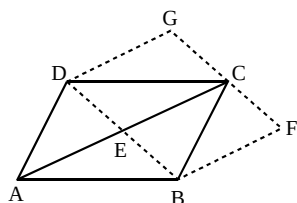
הנקודה F נמצאת על האלכסון AC כך ש- $FE \parallel DC$. והקטע DE נחתכים בנקודה M.

א. חשב את היחסים: (1) $\frac{FE}{AB}$. (2) $\frac{FE}{DC}$.

ב. הוכח: $MC = 3FM$.

ג. חשב את היחס $\frac{AM}{MC}$.

תשובה: א. (1) $\frac{2}{3}$. (2) $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{AM}{MC} = 1$.

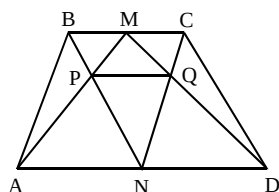


9. המרובעים ABCD ו-BFGD הם מקבילים.

נתון: $CG = CF$ (C על הקטע GF).

א. הוכח: המרובע ECGD הוא מקבילית.

ב. הוכח: אם המקבילית ABCD היא מעוין, אז המרובע ECGD הוא מלבן.



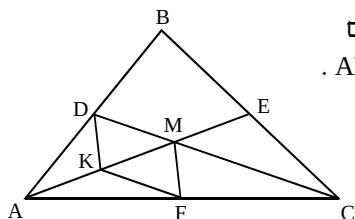
10. בטרפז ABCD ($BC \parallel AD$) הנקודות M ו-N הם אמצעי הבסיסים, הקטעים CN ו-DM נחתכים בנקודה Q, הקטעים AM ו-BN נחתכים בנקודה P (ראה ציור).

א. הוכח: $PQ \parallel AD$.

ב. נתון גם: $AD = 2a$, $BC = a$.

הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ.

תשובה: ב. $\frac{2}{3}a$.



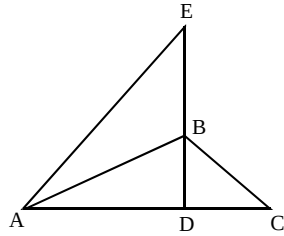
11. התיכונים AE ו-CD במשולש ABC נפגשים בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM.

F היא נקודה על הצלע AC

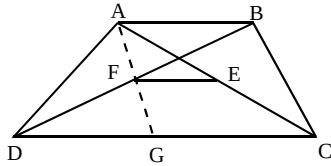
כך ש- $KF \parallel DC$ (ראה ציור).

הוכח: המרובע KDMF

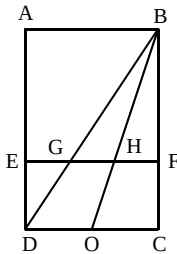
הוא מקבילית.



12. במשולש ABC, הגובה לצלע AC הוא BD. נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD, כך ש-AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור). נתון: $\angle BCA = 2 \cdot \angle BAC$.
 א. הוכח: $BC \cdot ED = BD \cdot EA$.
 ב. היעזר בנתונים ובסעיף א', והוכח: $BC \cdot ED = AD \cdot BE$.

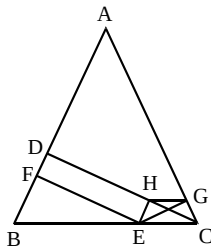


13. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) הנקודות E ו-F הן אמצעי האלכסונים AC ו-BD, בהתאמה. המשך הקטע AF חותך את DC בנקודה G.
 א. הוכח: $FE \parallel DC$.
 ב. הוכח: $S_{ADG} = S_{ABD}$.

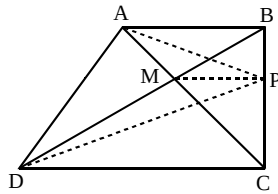


14. הנקודה O היא אמצע הצלע DC של מלבן ABCD. EF מקביל ל-DC וחותך את BD ואת BO בנקודות G ו-H (ראה ציור).
 א. הוכח: $GH = HF$.
 ב. נתון גם: $EG = GH$. מצא את היחס $\frac{FC}{BF}$.

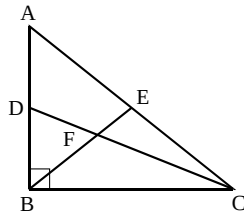
תשובה: ב. $\frac{1}{2}$.



15. במשולש ABC, CD הוא הגובה לצלע AB. מנקודה E שעל הצלע BC העבירו אנכים EF ו-EG לצלעות AB ו-AC. הנקודה H נמצאת על הקטע DC, כך שהמרובע CEHG הוא טרפז שווה-שוקיים ($GH \parallel CE$).
 א. הוכח: $CG = DF$.
 ב. הוכח: $AB = AC$.

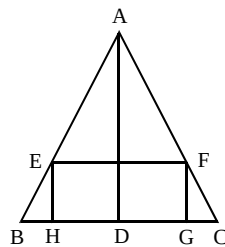


16. המרובע ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($\angle BCD = 90^\circ$, $AB \parallel CD$) שאלכסונו נחתכים בנקודה M. MP מקביל לבסיסים.
א. הוכח: $\frac{AB}{DC} = \frac{BP}{PC}$.
ב. הוכח: $\triangle ABP \sim \triangle DCP$.



17. משולש ABC הוא משולש ישר-זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). BE הוא תיכון לצלע AC, ו-CD הוא תיכון לצלע AB. התיכונים BE ו-CD נחתכים בנקודה F. א. חשב את היחס בין היקף המשולש BFC להיקף המשולש EFD.
ב. נתון גם כי הנקודה M היא אמצע הקטע FC, והנקודה N היא אמצע הקטע FB. הוכח כי המרובע DEMN הוא מקבילית.

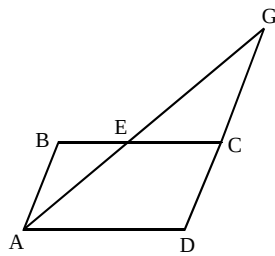
תשובה: א. 2.



18. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום מלבן EFGH, כך שהאלכסון HF מאונך לשוק AC. AD הוא תיכון לבסיס BC. נתון: $AD = BC$.
א. הוכח: $\frac{GC}{FG} = \frac{1}{2}$.
ב. הוכח: $\triangle HGF \sim \triangle FGC$.
ג. נתון: 10 ס"מ $HG =$. מצא את GC.

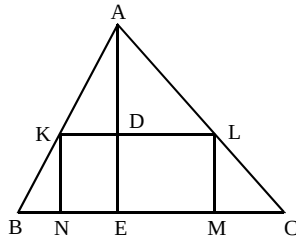
תשובה: ג. 2.5 ס"מ.

19. במקבילית ABCD נקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\frac{BE}{CE} = \frac{a}{b}$.



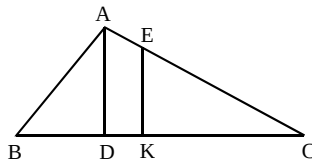
המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC בנקודה G. נתון כי שטח המשולש CEG הוא S. הבע באמצעות a ו-b :
 א. את שטח המשולש ABE.
 ב. חשב את שטח המשולש ADG.
 ג. את שטח המקבילית ABCD.

תשובה: א. $\frac{a^2 S}{b^2}$. ב. $\frac{(a+b)^2 S}{b^2}$. ג. $\frac{2a(a+b)S}{b^2}$.



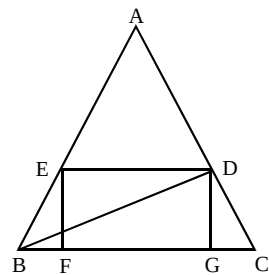
20. במשולש ABC חסום מלבן KLMN. הגובה AE לצלע BC חותך את צלע המלבן KL בנקודה D. נתון: $BC = 6$ ס"מ, $KL = 2KN$, $AE = h$. הבע באמצעות h :
 א. את אורך הקטע AD.
 ב. את יחס השטחים: $\frac{S_{AKD}}{S_{KBN}}$.

תשובה: א. $\frac{h^2}{h+3}$. ב. $\frac{h^2}{9}$.



21. מנקודה K שעל הצלע BC במשולש ABC, העלו אנך KE. AD הוא הגובה לצלע BC. נתון: $BD = 14$ ס"מ, $DC = 36$ ס"מ, ושטח המשולש EKC הוא חצי משטח המשולש ABC. מצא את אורך הקטע CK.

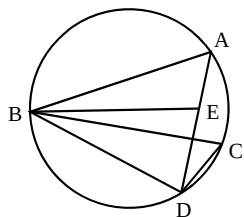
תשובה: 30 ס"מ.



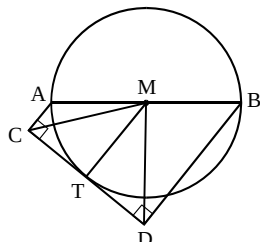
22. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$), חסום מלבן DEFG. BD חוצה את הזווית ABC ומחלק את השוק AC כך ש- $AD:DC = 2:1$. נתון: $BC = 2a$. בטא באמצעות a :
 (1) את אורכי הקטעים AD ו-DC.
 (2) את שטח המלבן DEFG.

תשובה: (1) $2\frac{2}{3}a$, $1\frac{1}{3}a$. (2) $\frac{4\sqrt{15}}{9}a^2$.

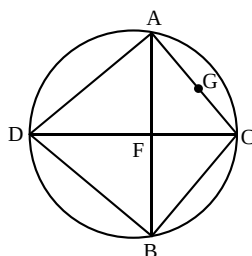
בעיות עם מעגל (כולל פרופורציה ודמיון)



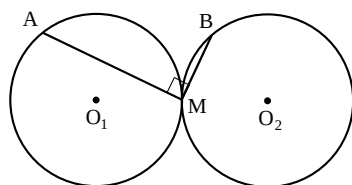
1. A, B, C ו-D הן נקודות על מעגל, כמתואר בציור. E היא נקודה על AD, כך ש- $AE = DC$. נתון: $AB = BC$.
 א. הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle CBD$.
 ב. המשך הקטע BE חותך את המעגל בנקודה M. הוכח: $AM = DC$.



2. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו M. הישר CD משיק למעגל בנקודה T. נתון: $AC \perp CD$, $BD \perp CD$.
 א. הוכח: $TM = \frac{AC + BD}{2}$.
 ב. הוכח: $MC = MD$.

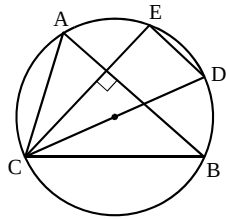


3. A, B, C ו-D הן נקודות על מעגל. המיתרים AB ו-CD נחתכים בנקודה F (ראה ציור). נתון: $\angle DAC = \angle DBC$.
 א. הוכח כי DC הוא קוטר.
 ב. נתון גם: $\angle ACD = \angle BCD$.
 הוכח: $AB \perp CD$.
 ג. נקודה G נמצאת על AC כך ש- $GF = AG$.
 הוכח: $GF = GC$.

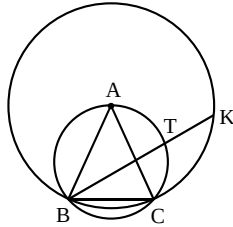


4. שני מעגלים, שיש להם אותו רדיוס R, משיקים זה לזה בנקודה M. מעבירים מיתר MB במעגל שמרכזו O_2 , ומיתר MA במעגל שמרכזו O_1 . כך ש- $\angle AMB = 90^\circ$ (ראה ציור).
 א. (1) נמק מדוע $\angle O_1MO_2 = 180^\circ$.
 (2) הוכח כי $AO_1 \parallel BO_2$.
 ב. במשולש AMB העבירו תיכון לצלע AB. הבע באמצעות R את אורך התיכון. נמק.

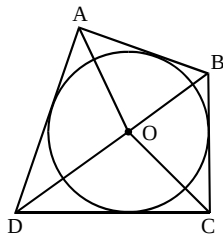
תשובה: ב. R.



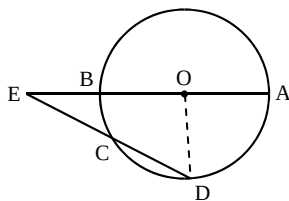
5. המשולש ABC חסום במעגל.
 הזוויות A ו-B הן חדות.
 CD הוא קוטר במעגל.
 נתון: $CE \perp AB$.
 הוכח: $\angle ACE = \angle BCD$.



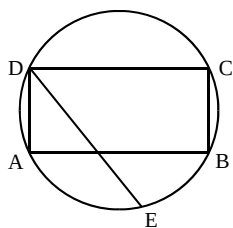
6. המשולש ABC חסום במעגל. מקדקוד A חגו מעגל נוסף, שבו A הוא מרכז המעגל, והנקודות B ו-C נמצאות על המעגל. ישר העובר דרך B חותך את המעגל החוסם בנקודה T, ואת המעגל האחר בנקודה K.
 א. הוכח: $\angle BTC = 2\angle BKC$.
 ב. הוכח: $TC = TK$.



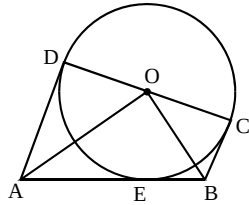
7. בתוך מרובע ABCD חסום מעגל שמרכזו בנקודה O.
 הוכח: $S_{AOB} + S_{DOC} = S_{AOD} + S_{BOC}$.



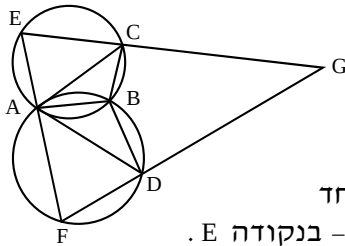
8. במעגל שמרכזו O, המשכי הקוטר AB והמיתר DC נפגשים בנקודה E.
 הוכח: $DE < AE$.



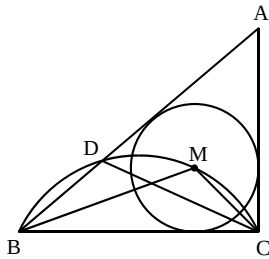
9. מלבן ABCD חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על הקשת AB כך ש- $DE = DC$ (ראה ציור).
 א. הוכח: $EB = BC$.
 ב. הוכח: $\angle EDB = \angle DBA$.



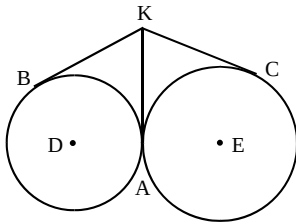
10. CD הוא קוטר המעגל שמרכזו O.
 CB משיק למעגל בנקודה C
 AD משיק למעגל בנקודה D.
 המעגל משיק לקטע AB בנקודה E.
 א. הוכח $AD \parallel BC$.
 ב. הוכח: $\angle AOB = 90^\circ$.
 ג. הוכח: $AB = AD + BC$.



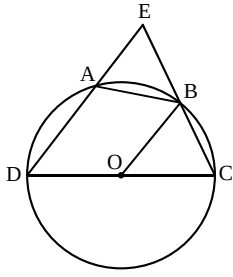
11. שני מעגלים לא שווים חותכים את זה בנקודות A ו-B.
 המשיק לאחד המעגלים בנקודה A
 חותך את המעגל האחר בנקודה C.
 המשיק למעגל האחר בנקודה A
 חותך את המעגל האחר בנקודה D.
 א. הוכח: $\angle ABC = \angle ABD$.
 ב. ישר העובר דרך הנקודה A חותך את אחד
 המעגלים בנקודה F ואת המעגל האחר - בנקודה E.
 הישרים EC ו-FD נפגשים בנקודה G.
 הוכח: המשולש EFG הוא שווה-שוקיים.



12. המשולש ABC חוסם מעגל שמרכזו M.
 המעגל העובר דרך הנקודות B, C, M ו-D,
 חותך את הצלע AB בנקודה D.
 נתון: $\angle A = \alpha$.
 א. הוכח: $\angle BMC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.
 ב. הוכח: $AD = AC$.

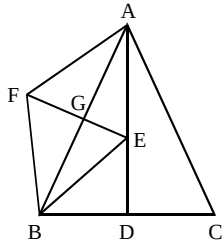


13. המעגלים D ו-E משיקים זה לזה בנקודה A.
 הקטע BK משיק למעגל D.
 הקטע CK משיק למעגל E.
 הקטע AK משיק לשני המעגלים.
 א. הוכח: $BK = CK$.
 ב. הוכח: הנקודה A נמצאת על הקטע DE.

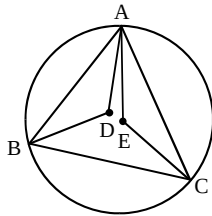


18. במעגל שמרכזו O חסום מרובע ABCD. DC הוא קוטר. המשכי הצלעות DA ו-CB נפגשים בנקודה E (ראה ציור). נתון: $OB \parallel DE$, $\angle BOC = \alpha$. א. הבע באמצעות α את $\angle ABO$. ב. נתון כי שטח המשולש OBC שווה לשטח המשולש BEA. הוכח כי $\triangle OBC \cong \triangle BEA$.

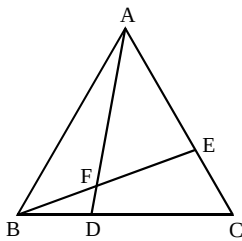
תשובה: א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.



19. AD הוא גובה לבסיס BC במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$). E היא נקודה על AD כך שהמרובע AEBF הוא דלתון ($AE = BE$, $AF = BF$). א. הוכח: הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. ב. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD.

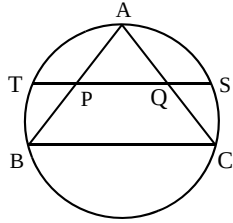


20. הנקודה D היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC והנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. הוכח: $\angle AEC = 4 \cdot \angle ABD$.

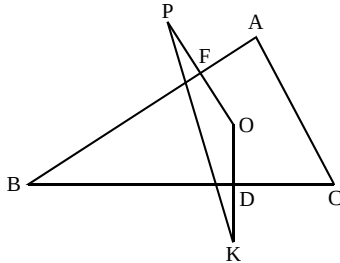


21. המשולש ABC הוא שווה-צלעות. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AC כך ש- $DC = AE$. א. הוכח: $\triangle ACD \cong \triangle BAE$. ב. חשב את הזווית DFE. ג. הוכח שהמרובע CDFE בר-חסימה במעגל. ד. הוכח: $\angle DFC = \angle DEC$.

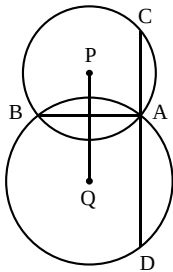
תשובה: ב. 120° .



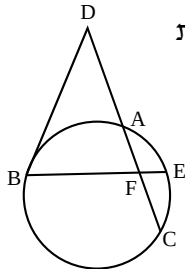
22. המשולש שווה-השוקיים ABC ($AB = AC$) חסום במעגל. P ו- Q הן אמצעי השוקיים AB ו- AC , בהתאמה. המשיכי הקטע PQ חותכים את המעגל בנקודות T ו- S .
א. הוכח: $TB = SC$.
ב. הוכח: $TP = QS$.



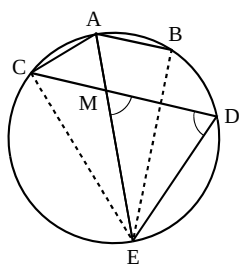
23. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC . המעגל משיק לצלע BC בנקודה D ולצלע AB בנקודה F . המשיכו את OD עד K ואת OF עד P כך ש- $OD = DK$ ו- $OF = FP$.
א. הוכח כי $FD \perp BO$.
ב. הוכח כי $BO \perp PK$.



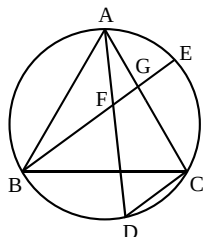
24. א. הוכח את המשפט: קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים – חוצה את המיתר המשותף לשני המעגלים ומאונך לו.
ב. בציור מתוארים מעגלים P ו- Q הנחתכים בנקודות A ו- B . דרך A מעבירים ישר החותך את המעגלים P ו- Q בנקודות C ו- D , בהתאמה. נתון: $DC \parallel PQ$. הוכח: BC ו- BD הם קטרים במעגלים P ו- Q .



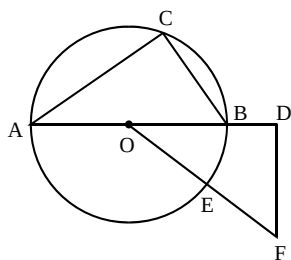
25. א. הוכח את המשפט: זווית חיצונית למעגל שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית.
ב. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך המיתר AC בנקודה D . הנקודה E היא אמצע הקשת AC . AC ו- BE נחתכים בנקודה F . הוכח: $DB = DF$.



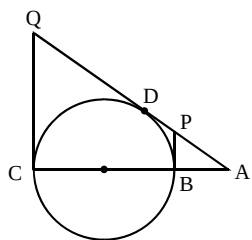
26. הנקודות A, B, C, D, E נמצאות על מעגל (ראה ציור).
 נתון: $CD \parallel AB$,
 הקשתות CA ו-AB שוות,
 AE הוא קוטר במעגל,
 החותך את המיתר CD בנקודה M.
 א. הוכח כי $\angle EMD = \angle MDE$.
 ב. הוכח כי המרובע ABMC הוא מעוין.



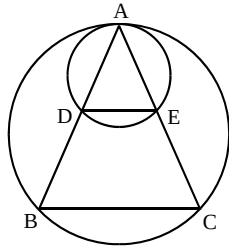
27. ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.
 D היא נקודה על הקשת $\widehat{BC}$, ו-E היא נקודה על הקשת $\widehat{AC}$ כך ש-DC מקביל ל-BE.
 BE חותך את AD בנקודה F ואת AC בנקודה G.
 א. הוכח: $\angle ADC = 60^\circ$.
 ב. הוכח: המשולש BFD הוא שווה-צלעות.
 ג. הוכח שלא קיים מעגל העובר דרך קדקודי המרובע BGCD.



28. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.
 AB הוא קוטר במעגל.
 נתון: $OD \perp DF$, $\widehat{BC} = 2 \cdot \widehat{BE}$.
 א. הוכח: $\triangle ACB \sim \triangle ODF$.
 ב. נתון: $BC = 6$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ, $AD = 13$ ס"מ. הוכח: $\triangle ACB \cong \triangle ODF$.

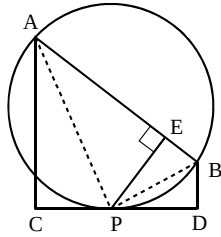


29. CB הוא קוטר של מעגל. CQ משיק למעגל בנקודה C, AQ משיק למעגל בנקודה D.
 ו-BP משיק למעגל בנקודה B.
 נתון: $AP = 10$ ס"מ, $AQ = 40$ ס"מ.
 חשב את רדיוס המעגל.
תשובה: 12 ס"מ.

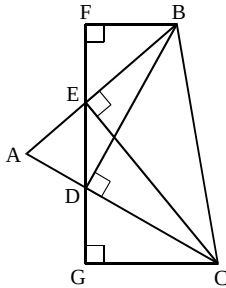


30. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A. AB ו-AC הם מיתרים במעגל הגדול החותכים את המעגל הקטן בנקודות D ו-E.
א. הוכח: $DE \parallel BC$.
ב. נתון: $BC = 2.5DE$, $BD = 6$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AD.

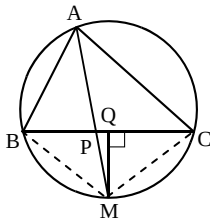
תשובה: ב. 4 ס"מ.



31. CD משיק למעגל בנקודה P, ו-AB הוא מיתר במעגל זה. AC ו-BD הם אנכים למשיק. PE הוא אנך מנקודת ההשקה P למיתר AB.
א. הוכח: $\triangle ACP \sim \triangle PEB$.
ב. הוכח: $\triangle BDP \sim \triangle PEA$.
ג. הוכח: $AC \cdot BD = PE^2$.

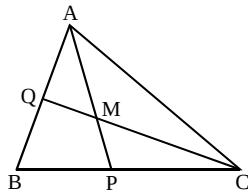


32. נתון משולש חד-זווית ABC. CE הוא גובה לצלע BA, ו-BD הוא גובה לצלע AC.
א. הוכח: המשולש DBC חסום במעגל החוסם את המשולש EBC.
(2) הוכח: $\angle DBC = \angle DEC$.
ב. BF ו-CG מאונכים להמשכי הקטע ED, כמתואר בציור.
(1) הוכח: $\triangle DCB \sim \triangle FEB$.
(2) הוכח: $\triangle EBC \sim \triangle GDC$.

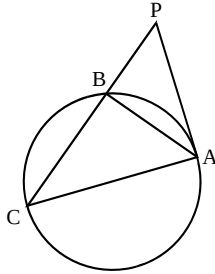


33. המשולש ABC חסום במעגל.
נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BM = MC$, $MQ \perp BC$, $AC = 25$ ס"מ, $BC = 36$ ס"מ.
א. חשב את אורך הקטע PQ.
ב. נתון: $S_{BPM} = 96$ סמ"ר. חשב את S_{CPM} .

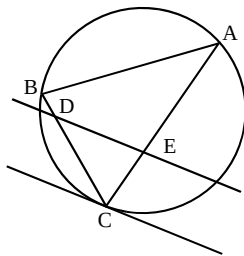
תשובה: א. 2 ס"מ. ב. 120 סמ"ר.



34. בציור שלפניך נתון: $AC = 40$ ס"מ, $PC = 20$ ס"מ, $BP = 15$ ס"מ, $BQ = 14$ ס"מ, $AQ = 16$ ס"מ. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.



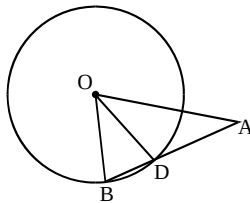
35. PA הוא משיק למעגל ו-PC חותך את המעגל בנקודות B ו-C. הוכח: $\frac{PC}{PB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.



36. המשולש ABC חסום במעגל. E היא נקודה על צלע AC. דרך הנקודה E העבירו מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה C. א. הוכח: $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. ב. נתון: $BD = 2$ ס"מ, $DC = 6$ ס"מ, $AE = 2EC$. שטח המשולש ABC הוא S. הבע באמצעות S את שטח המשולש DEC.

תשובה: $\frac{1}{4}S$.

37. הוכח: הרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו הצלעות המתאימות.



38. המשולש ABO הוא שווה שוקיים ($AB = AO$). הנקודה O היא מרכז המעגל. א. הוכח: $\triangle BOD \sim \triangle BAO$. ב. נתון: $OD = 12$ ס"מ, $AD = 10$ ס"מ. חשב את היחס בין שטח המשולש BOD לשטח המשולש AOD.

תשובה: ב. 4:5.

47. הנקודות A, B, C מונחות על מעגל כך ש- $AB < AC$.

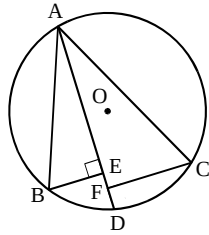
הקשת BD שווה לקשת DC ($\widehat{DB} = \widehat{DC}$).
הנקודות E ו-F מונחות על המיתר AD,

כך ש- $BE \perp AD$, $CF \perp AD$.

א. הוכח: $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$.

ב. הוכח: $\frac{S_{ABE}}{S_{ACF}} < 1$.

ג. הוכח: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} < 1$.



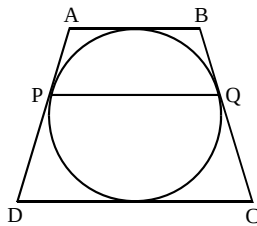
48. ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים החוסם מעגל.

אורכי הבסיסים של הטרפז הם a ו-b.

שוקי הטרפז משיקות למעגל בנקודות P ו-Q.

א. הוכח: $PQ \parallel DC$.

ב. הוכח: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$.



49. משולש ABC חסום במעגל. המיתר AM

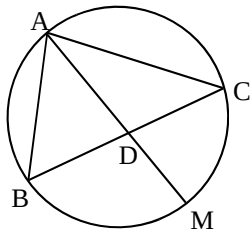
חותך את הצלע BC בנקודה D.

א. הוכח: $\triangle ADC \sim \triangle BDM$.

ב. הוכח: $\triangle ADB \sim \triangle CDM$.

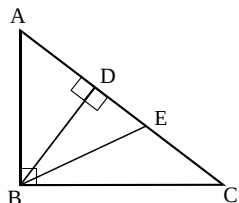
ג. נתון: $AB \cdot BM = AC \cdot CM$.

הוכח: $BD = DC$.

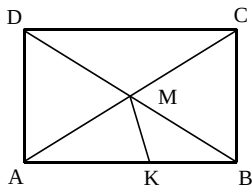


טריגונומטריה במישור (5 יחידות)

הערה: התרגילים כוללים שימוש בפונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר-זווית, ושימוש במשפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים.



1. במשולש ישר-זווית ABC נתון: $AB = 6$ ס"מ, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$. BD הוא גובה ליתר. BE הוא חוצה-זווית של $\angle DBC$. הבע את אורך הקטע EC באמצעות α .
- תשובה:** $6 \sin \alpha (\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{2})$.



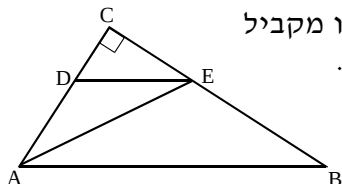
2. במלבן ABCD נתון: $AB = 8.4$ ס"מ, $AC = 10$ ס"מ, $AM = AK$. חשב את אורך הקטע MK.
- תשובה:** 2.828 ס"מ.

3. נתון משולש ששטחו 35 סמ"ר. אורכי שתיים מצלעותיו הם 10 ס"מ ו-8 ס"מ. חשב את אורך הצלע השלישית של המשולש. רשום את שתי האפשרויות.

תשובה: 9.303 ס"מ או 15.54 ס"מ.

4. היקפו של משולש ABC הוא 40 ס"מ. הצלע BC גדולה ב-6 ס"מ מהצלע AB. נתון: $\angle ABC = 60^\circ$. חשב את אורכי צלעותיו של המשולש.

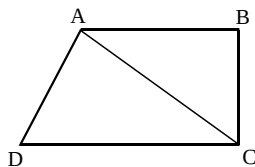
תשובה: 16 ס"מ, 10 ס"מ, 14 ס"מ.



5. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) העבירו מקביל ליתר, החותך את הניצבים בנקודות D ו-E. נתון: $DE = m$, $\angle ABE = \alpha$, $\angle DAE = \alpha$. הבע באמצעות m ו- α את אורכי הקטעים AB ו-BE.

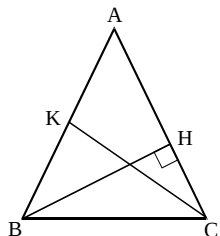
תשובה: $\frac{m \cos \alpha \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$, $\frac{m \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

6. ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($BC \perp DC$, $AB \parallel CD$). נתון: $AC = CD$, $\angle ACD = \alpha$.
 א. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.
 ב. חשב את היחס הנ"ל כאשר $\alpha = 60^\circ$.

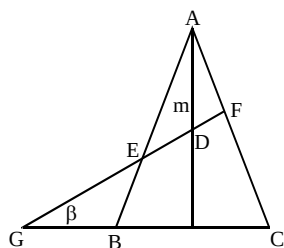


תשובה: א. $\frac{1}{\cos \alpha}$. ב. 2.

7. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) שווה אורך הבסיס ל- a , והזווית שלידו ל- β ($\beta > 45^\circ$).
 BH הוא גובה לשוק AC ו-CK תיכון לשוק AB.
 הבע באמצעות a ו- β :
 א. את אורך הקטע AH.
 ב. את שטח המשולש AKH.

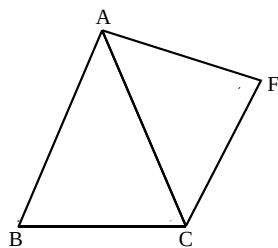


תשובה: א. $\frac{-a \sin \beta \cos 2\beta}{\sin 2\beta}$. ב. $\frac{-a^2 \sin^2 \beta \cos 2\beta}{4 \sin 2\beta}$.



8. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) זווית הראש היא 2α . דרך הנקודה D, הנמצאת על הגובה לבסיס במרחק m מהקדקוד A העבירו ישר היוצר זווית β עם הישר BC. ישר זה חותך את שוקי המשולש בנקודות E ו-F. הבע את שטח המשולש AEF באמצעות m , α ו- β .

תשובה: $\frac{m^2 \sin 2\alpha \cos^2 \beta}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$.

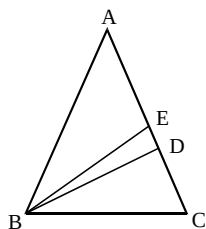


9. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) בנו על השוק AC משולש שווה-שוקיים AFC כך ש- $AF = CF = BC = a$.
 נסמן: $\angle ABC = \alpha$, $\angle AFC = \beta$.
 א. (1) הבע את האורך של השוק AC באמצעות a ו- α .

(2) הוכח כי $\cos \beta = 1 - \frac{1}{8 \cos^2 \alpha}$.

- ב. נתון כי משולש AFC הוא ישר-זווית. מצא את הזוויות במשולש ABC.

תשובה: א. (1) $\frac{a \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$. ב. 69.295° , 69.295° , 41.41° .

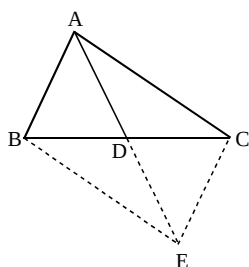


10. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AB = AC$). BD הוא הגובה לשוק ו- BE הוא חוצה זווית של $\angle ABC$. נתון: $\angle BAC = 2\alpha$ ($\alpha < 30^\circ$), $AB = AC = 10$ ס"מ. א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BDE. ב. הצב $\alpha = 30^\circ$ בביטוי שקיבלת בסעיף א'. הסבר את התוצאה שקיבלת.

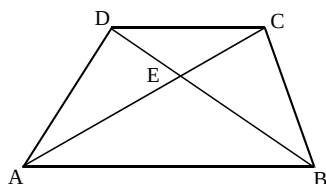
תשובה: א. $(\frac{1}{2}\alpha - 1)\tan(45^\circ) \sin^2 2\alpha$. ב. 0.

11. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AB = AC$). AD הוא גובה לבסיס BC ו- CE הוא גובה לשוק AB. שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$). א. הבע את היחס $\frac{AO}{DO}$ באמצעות α . ב. הצב $\alpha = 60^\circ$ ביחס של סעיף א', והסבר את התוצאה המתקבלת. ג. הצב $\alpha = 45^\circ$ ביחס של סעיף א', והסבר את התוצאה המתקבלת.

תשובה: א. $\tan^2 \alpha - 1$. ב. $\frac{AO}{DO} = 2$, נקודה D היא נקודת מפגש התיכונים. ג. $\frac{AO}{DO} = 0$, כלומר $AO = 0$. O ו- A מתלכדות.

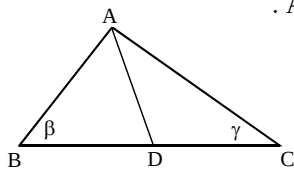


12. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC. נתון: $AC = 12$ ס"מ, $\angle BAD = 42^\circ$, $\angle DAC = 36^\circ$. חשב את אורך התיכון AD. הדרכה: הארך את התיכון AD כאורכו כך שתיווצר מקבילית ABEC. תשובה: 8.771 ס"מ.



13. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) היא נקודת החיתוך של האלכסונים. נתון: $DC = BC$, $BE = k$, $\angle AEB = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ (ראה ציור). הבע באמצעות k , α ו- β את אורך בסיסי הטרפז DC ו- AB.

תשובה: $\frac{k \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\frac{k \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

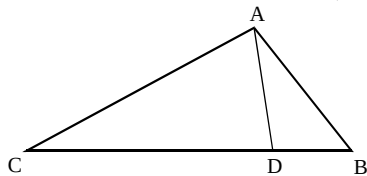


14. AD הוא חוצה-הזווית של $\angle BAC$ במשולש ABC.

נתון: $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

א. הוכח: $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$. ב. הוכח: $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$.

ג. הוכח: אם $S_{ABD} = S_{ADC}$, אז $AD \perp BC$.



15. D היא נקודה על הצלע CB במשולש ABC.

נתון: $\angle DAB = 20^\circ$, $\angle CAD = \alpha$,

7 ס"מ $AC =$, 5 ס"מ $AB =$.

א. הבע באמצעות α את היחס

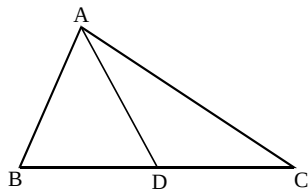
שבין שטח המשולש ADC

לשטח המשולש ADB.

ב. מצא את α כאשר שטחי המשולשים שווים.

ג. בעבור איזה ערך של α יחס השטחים הנ"ל הוא הגדול ביותר?

תשובה: א. $\frac{7 \sin \alpha}{5 \sin 20^\circ}$. ב. 14.14° . ג. 90° .



16. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

נתון: 7 ס"מ $AC =$, 8 ס"מ $BC =$,

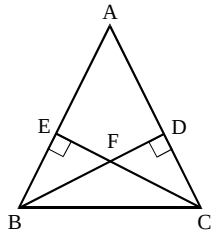
$AB = AD$. חשב את הזווית C

ואת אורך הצלע AB.

תשובה: 31° , 4.123 ס"מ.

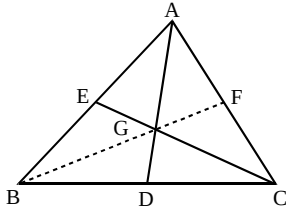
בעיות המשלבות גיאומטריה וטריגונומטריה

השאלות הבאות משלבות ידע מגיאומטריה וטריגונומטריה.



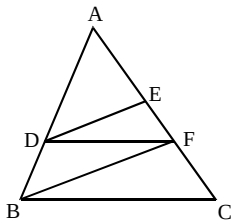
1. במשולש ABC , BD ו- CE הם גבהים לצלעות AC ו- AB . נתון: $BD = CE$.
א. הוכח: המשולש ABC הוא שווה-שוקיים.
ב. נתון: $CE = 8$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ.
חשב את הזווית BAC .

תשובה: ב. 64.01° .



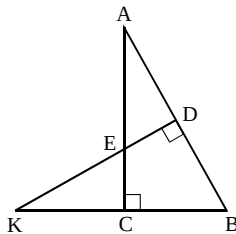
2. הנקודות D ו- E הן אמצעי הצלעות BC ו- AB של משולש ABC . AD ו- CE נחתכים בנקודה G . המשך הקטע BG חותך את הצלע AC בנקודה F .
א. הוכח: $AF = CF$.
ב. נתון: $AC = 6$ ס"מ, $\angle ABF = 30^\circ$, $\angle BAC = 70^\circ$.
חשב את אורך הצלע AB .

תשובה: ב. 45.58° .



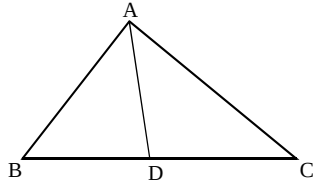
3. בציור שלפניך נתון: $DE \parallel BF$, $DF \parallel BC$,
 $AD = 8$ ס"מ, $BF = 9$ ס"מ,
 $BC = 13$ ס"מ, $DE = 6$ ס"מ.
א. חשב את אורך הקטע DF .
ב. חשב את הזווית DBF .

תשובה: א. $8\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 72.3° .



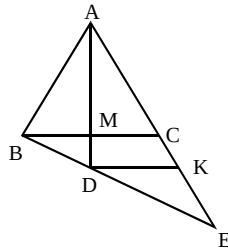
4. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\angle C = 90^\circ$).
האנך האמצעי ליתר AB חותך את היתר בנקודה D , את הניצב AC בנקודה E ואת המשך הניצב BC בנקודה K .
א. הוכח: $\triangle AED \sim \triangle KBD$.
ב. נתון: $KE = 3a$, $DE = a$.
חשב את הזווית B .

תשובה: ב. 63.43° .



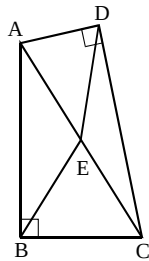
5. AD הוא חוצה-זווית A במשולש ABC (ראה ציור). נתון: $\angle BAC = 50^\circ$,
 4 ס"מ $BD =$, 5 ס"מ $DC =$.
 א. מצא את היחס בין הצלע AC לצלע AB.
 ב. מצא את אורך הצלע AB.

תשובה: א. 4:5 . ב. 9.207 ס"מ.



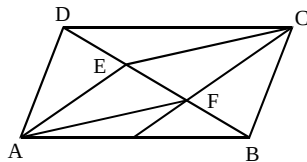
6. AM הוא התיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$). נקודה E נקודה על המשך הצלע AC. המשך התיכון AM חותך את הקטע BE בנקודה D. הקטע DK מקביל ל-BC. א. הוכח: $\frac{AB}{AE} = \frac{CK}{EK}$.
 ב. נתון: 8 ס"מ $AB =$, 2 ס"מ $CK =$. חשב את אורך הקטע EK.
 ג. נתון גם: $\angle ABE = 82^\circ$. חשב את הזווית BAC.

תשובה: ב. $3\frac{1}{3}$ ס"מ. ג. 61.55° .



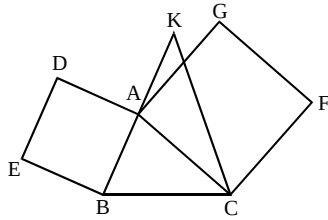
7. במרובע ABCD נתון: $AB \perp BC$, $AD \perp DC$. נקודה E היא אמצע האלכסון AC. א. הוכח: $BE = DE$.
 ב. נתון: $\angle BCD = 74^\circ$. חשב את הזווית BED.
 ג. נסמן: $\angle BCE = \alpha$. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ADE לשטח המשולש ABE.

תשובה: ב. 148° . ג. $\frac{\sin(148^\circ - 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$.

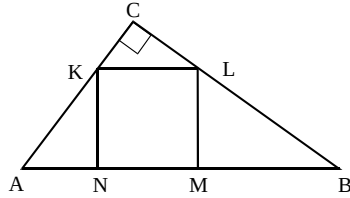


8. המרובע ABCD הוא מקבילית. הקטעים AE ו-CF הם חוצי זוויות המקבילית - $\angle DAB$ ו- $\angle DCB$, בהתאמה. א. הוכח: המרובע AECF הוא מקבילית.
 ב. נתון: $AB = 2BC$. הוכח: המשך הקטע CF חוצה את צלע המקבילית AB.
 ג. נתון גם: $BD = 0.8DC$. חשב את הזווית החדה של המקבילית ABCD.

תשובה: ג. 52.41° .

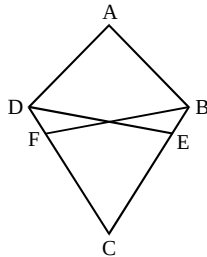


9. על AB ועל AC, צלעות המשולש ABC בנו ריבועים כמתואר. הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AB, ומתקיים: $AB = AK$.
 א. הוכח: (1) $\triangle DAG \cong \triangle KAC$.
 (2) $S_{ABC} = S_{DAG}$.
 ב. נתון: $\angle ACB = 45^\circ$. הוכח: $S_{ABC} = S_{BCF}$.



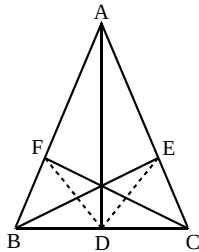
10. ABC הוא משולש ישר-זווית ($AC \perp BC$). KLMN הוא ריבוע החסום במשולש.
 נתון: $AN = 4$ ס"מ, $MB = 9$ ס"מ.
 א. חשב את צלע הריבוע.
 ב. חשב את הזווית CKL.

תשובה: א. 6 ס"מ. ב. 56.31° .



11. המרובע ABCD הוא דלתון ($AB = AD$, $BC = DC$). DE חוצה את הזווית ADC ו-BF חוצה את הזווית ABC.
 א. הוכח: המרובע BDFE הוא טרפז שווה-שוקיים.
 ב. נתון: $\angle DBF = \alpha$, $DE = m$.
 הבע באמצעות m ו- α את שטח הטרפז BDFE.

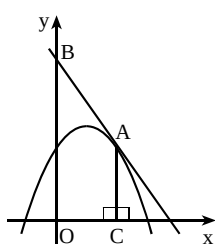
תשובה: ב. $\frac{m^2 \sin 2\alpha}{2}$.



12. AD, BE ו-CF הם הגבהים של משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).
 א. הוכח: $DE = DF$.
 ב. נתון: $\angle ACB = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).
 הבע באמצעות α את הזווית FDE.
 ג. נתון גם: $BC = 2a$.
 הבע באמצעות a ו- α את שטח המשולש DEF.

תשובה: ב. $4\alpha - 180^\circ$. ג. $\frac{a^2 \sin(4\alpha - 180^\circ)}{2}$.

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים (5 יחידות)



1. לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 2x + 3$ מעבירים משיק בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה B . מנקודה A מורידים אנך AC לציר ה- x . חשב את שטח הטרפז $ABOC$ (O - ראשית הצירים).

תשובה: 10.

2. הישר $y = 2x + 4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 8x + c$. מצא את ערכו של c .

תשובה: 13.

3. לגרף הפונקציה $y = x^4 - 16x + 2a$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y = 4$. שיפוע המשיק הוא 16. מצא את הפרמטר a .

תשובה: 10.

4. הנקודות A ו- B נמצאות על גרף הפונקציה $y = x^3 - 7x + 1$, כך ששיעור ה- x בנקודה A גדול ב-4 משיעור ה- x בנקודה B . ידוע כי המשיקים לפונקציה בנקודות A ו- B מקבילים זה לזה. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

תשובה: $A(2; -5)$, $B(-2; 7)$.

5. נתונה פונקציה $y = x^2 - 5x + 11$ ונתונה נקודה $(0; -5)$ הנמצאת מחוץ לגרף הפונקציה. דרך הנקודה הנתונה מעבירים משיקים לפונקציה הנתונה. מצא את נקודות ההשקה ואת משוואות המשיקים.

תשובה: $y = 3x - 5$ $(4; 7)$, $y = -13x - 5$ $(-4; 47)$.

6. גרף הפונקציה $y = 2x^2 - ax + 8$ ($a > 0$) משיק לציר ה- x . מצא את a ואת שיעורי נקודת ההשקה.

תשובה: $a = 8$, $(2; 0)$.

חקור את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים ומצא:
 א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
 ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט את גרף הפונקציה.

7. $y = x(12 - x^2)$ 8. $y = x^4 - 18x^2 + 32$

9. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 63x + 49$.
 א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון,
 תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
 ב. הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(1; 0)$.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x ?

10. חקור את הפונקציה $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ ומצא: א. תחום הגדרה.
 ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
 ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

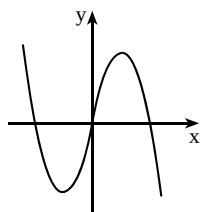
11. נתונה הפונקציה $y = x^4 - 4x^2$.
 א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות
 חיתוך עם הצירים.
 ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
 ג. מצא לאילו ערכים של k , הפונקציה חותכת את הישר $y = k$:
 (1) ב-4 נקודות. (2) ב-3 נקודות. (3) ב-2 נקודות. (4) באף נקודה.

12. לפונקציה $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx + 10$ יש נקודת קיצון ב- $x = 1$.
 א. מצא את m .
 ב. מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה,
 ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) - 13 = 0$.

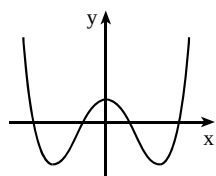
13. גרף הפונקציה $y = x^2 - (a+7)x + 4a + 12$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות
 ($a > 1$). שיפוע המשיק לגרף בנקודת החיתוך הימנית מבין השתיים
 שווה ל-9. מצא את a .

14. נתונה הפונקציה $y = -x^3 + 3ax$, $a > 0$.
- א. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים (במידת הצורך, הבע תשובותיך באמצעות a).
- ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. לאילו ערכים של k חותך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה (הבע באמצעות a):
- (1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) בשלוש נקודות.

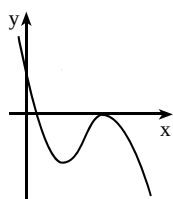
תשובות:



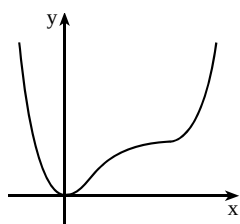
7. א. כל x .
- ב. (2;16) מקסימום, (-2;-16) מינימום.
- ג. עלייה: $-2 < x < 2$.
- ירידה: $x < -2$ או $x > 2$.
- ד. (0;0), (3.464;0), (-3.464;0).



8. א. כל x .
- ב. (3;-49) מינימום, (0;32) מקסימום.
- ג. עלייה: $-3 < x < 0$ או $x > 3$.
- ירידה: $0 < x < 3$ או $x < -3$.
- ד. (0;32), (4;0), (-4;0), ($\sqrt{2}$;0), ($-\sqrt{2}$;0).

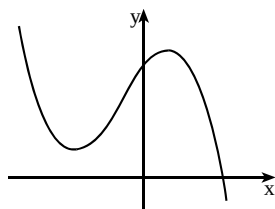


9. א. תחום הגדרה: כל x .
- נקודות קיצון: (3;-32) מינימום, (7;0) מקסימום.
- עלייה: $3 < x < 7$; ירידה: $x < 3$ או $x > 7$.
- נקודת חיתוך: (0;49).
- ד. בשתי נקודות.



10. א. כל x .
- ב. (0;0) מינימום.
- ג. עלייה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$.
- ד. (0;0).

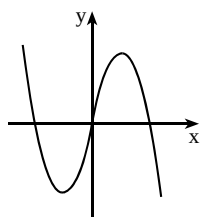
11. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{2}; -4)$ מינימום, $(0; 0)$ מקסימום, $(-\sqrt{2}; -4)$ מינימום. נקודות חיתוך: $(2; 0)$, $(0; 0)$, $(-2; 0)$.
 ב. חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: $-2 < x < 2$, $x \neq 0$.
 ג. (1) $-4 < k < 0$. (2) $k = 0$. (3) $k > 0$ או $k = -4$. (4) $k < -4$.



12. א. 3.
 ב. $(1; 11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(-3; 1)$ מינימום.
 ג. פתרון אחד.

13. 10.

14. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{a}; 2a\sqrt{a})$ מקסימום, $(-\sqrt{a}; -2a\sqrt{a})$ מינימום.



- תחומי עלייה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,
 תחומי ירידה: $x < -\sqrt{a}$ או $x > \sqrt{a}$.
 נקודות חיתוך: $(0; 0)$, $(\sqrt{3a}; 0)$, $(-\sqrt{3a}; 0)$.
 ג. (1) $k > 2a\sqrt{a}$ או $k < -2a\sqrt{a}$. (2) $k = 2a\sqrt{a}$ או $k = -2a\sqrt{a}$. (3) $-2a\sqrt{a} < k < 2a\sqrt{a}$.

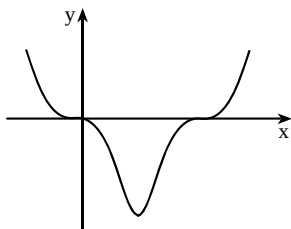
15. הפונקציה $y = x^3 - 15x^2 + 48x - 3$ מוגדרת בקטע $[0, 11]$.
 א. מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.
 ב. הסבר מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות שונות.

תשובה: א. 41, -67.

16. לגרף הפונקציה $y = (3x - 2)^5$ מעבירים שני משיקים ששיפועיהם 15.
 מצא את משוואות המשיקים.

תשובה: $y = 15x - 14$, $y = 15x - 6$.

17. מצא עבור הפונקציה $y = (x^2 - 6x)^3$:
 א. נקודות מינימום ומקסימום. ב. תחומי עלייה וירידה.
 ג. נקודות חיתוך עם הצירים. ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



17. א. $(3; -729)$ מינימום.

ב. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$.

ג. א. $(0;0)$, $(6;0)$.

18. לגרף הפונקציה $y = (x-2)^3(6-x)^4$ מעבירים משיק בנקודה $x = 4$.

א. חשב את שיפוע המשיק. ב. מצא את משוואת המשיק.

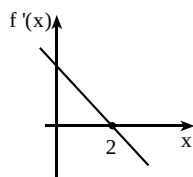
תשובה: א. -64 . ב. $y = -64x + 384$.

19. לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מקסימום ב- $x = 2$.

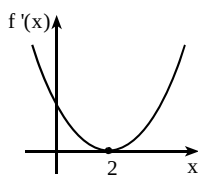
א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x < 2$?

ב. איזה מן הגרפים הבאים $(1, 2, 3, 4)$ יכול לתאר את גרף הנגזרת

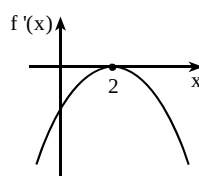
$f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



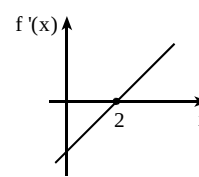
גרף 1



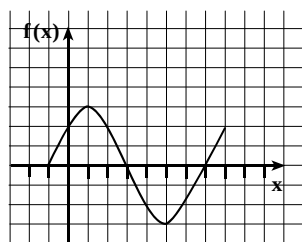
גרף 2



גרף 3



גרף 4



20. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$

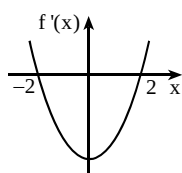
א. בתחום $-1 \leq x \leq 8$. נתון: $f'(-1) = 4$.

א. שרטט סקיצה של גרף פונקציית

הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-1 \leq x \leq 8$.

ב. נתון: $f'(0) = f(0)$. מצא את משוואת

המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 0$.



21. בצויר מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

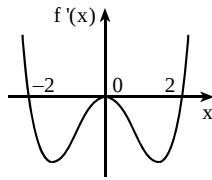
א. מצא את תחומי העלייה והירידה

של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון

של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון גם: $f(0) = 0$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



22. בציר מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. נתון: $f(0) = 0$.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

23. $f(x)$ היא פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $-3 \leq x \leq 3$.

לפניך גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 3$.

א. נתון כי $f'(x)$ היא פונקציה זוגית בתחום $-3 \leq x \leq 3$.

העתק את השרטוט למחברתך, והשלם

את הגרף של $f'(x)$ לכל התחום $-3 \leq x \leq 3$.

ב. מהם ערכי x עבורם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות?

ציין היכן יש מינימום והיכן יש מקסימום. נמק.

ג. נתון: $f(x) > 0$ לכל x בתחום $-3 \leq x \leq 3$, $f(-2) = 1$.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל התחום $-3 \leq x \leq 3$.

24. א. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 8x - 24$.

(1) הוכח שהפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x .

(2) חשב את $f(-3)$.

(3) על-פי הסעיפים (1) ו-(2), מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$

שלילית, ועבור אילו ערכי x היא חיובית.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^3 - 4x^2 - 24x - 7$.

(1) מצא בעזרת סעיף א' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,

וקבע אם היא מינימום או מקסימום.

(2) הסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.

ג. מצא עבור אילו ערכים של k למשוואה $g(x) = k$:

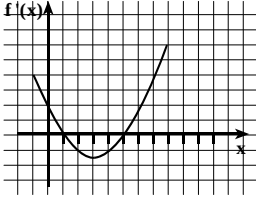
(1) יש פתרון יחיד.

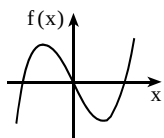
(2) יש שני פתרונות.

(3) אין אף פתרון.

תשובות:

19. א. חיובי. ב. גרף 1.

20. א. . ב. $y = 2x + 2$.

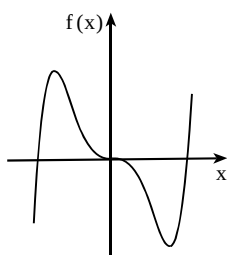


ג.

21. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$,

ירידה: $-2 < x < 2$.

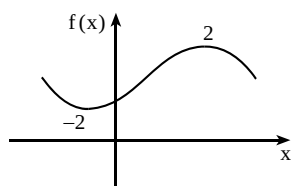
ב. $x = -2$ מקסימום, $x = 2$ מינימום.



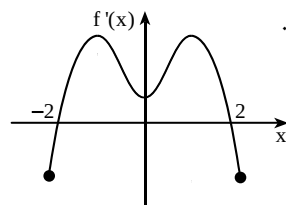
ב.

22. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$.

ירידה: $-2 < x < 2$.



ג.



23. א.

ב. $x = -2$ מינימום, $x = 2$ מקסימום.

24. א. (2) $f(-3) = 0$. (3) חיובית: $x < -3$, שלילית: $x > -3$.

ב. (1) $(-3; 35.75)$ מקסימום.

ג. (1) $k = 35.75$. (2) $k < 35.75$. (3) $k > 35.75$.

עבודת קיץ – פונקציות רציונליות (5 יחידות)

1. הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $y = \frac{ax+16}{x^2-3x-b}$. בנקודה $x = 2$ לפונקציה יש נקודת קיצון.
 א. מצא את a ואת b .
 ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים ישר המקביל לציר ה- x וישר המקביל לציר ה- y . ארבעת הישרים הנ"ל יוצרים מלבן. חשב את שטח המלבן.

2. לפונקציה $f(x) = \frac{2x^3+ax}{x^2-1}$ יש מינימום בנקודה $x = 2$.
 א. מצא את הערך של הפרמטר a .
 ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 ג. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
 ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 7$?

3. הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x) = a + \frac{4x-15}{(x-4)^2}$.
 א. מצא את הערך של a .
 ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ו. הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 2f(x) + c$. נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ היא $(3.5; 3)$. מצא את ערך הפרמטר c .

4. גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - x - m}{x^2}$ חותך את האסימפטוטה האופקית שלו ב- $x = -2$.
 א. מצא את m .
 ב. מצא תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. מצא לאילו ערכים של k , יש למשוואה $f(x) = k$:
 (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) אף פתרון.

5. נתונה פונקציה $f(x) = \frac{2}{ax^2 - x}$. אחת האסימפטוטות של הפונקציה היא ישר המקביל לציר ה- y (ולא מתלכד איתו). ישר זה חותך את הישר $y = x + 3$ בנקודה ששיעור ה- y שלה הוא 4.
 א. מצא את הערך של הפרמטר a .
 ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. מצא לאילו ערכים של t יש למשוואה $f(x) = t$:
 (1) שני פתרונות. (2) אף פתרון. (3) פתרון אחד.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{kx^2 + x + 1}{x^2 - 4x + m}$.
 א. מצא את הערך של m .
 ב. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 2$.
 ג. האסימפטוטה האופקית של הפונקציה חותכת את גרף הפונקציה בנקודה שעל ציר ה- y . מצא את הערך של k .
 ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = (f(x))^2$.
 מהי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$?

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-k}{x-3}$, $k \neq 3$.
 א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. לאילו ערכים של k הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל x בתחום ההגדרה?
 ג. ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = k$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 5$. מצא את הערך של k , אם נתון כי הפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{32x}{(x^2+3)^2}$.

- א. הוכח שהפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .
 ב. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן $f'(x) = 0$, וקבע אם הן מסוג מינימום או מקסימום.
 ג. הוכח שפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

- חקור את הפונקציות הבאות ומצא: א. תחום הגדרה, ב. נקודות קיצון, ג. תחומי עלייה וירידה, ד. נקודות חיתוך עם הצירים, ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים, ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9. $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}$ 10. $y = \frac{x^2 - 7x + 10}{3x^2 - 15x}$

11. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$.

- א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
 (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{2x+5}{x-4}$.
 בהסתמך על סעיפים קודמים שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-8x}{x^2+4}$.

- א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
 (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. הפונקציה $g(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $f(x)$, כלומר $g(x) = f'(x)$.
 שרטט בתחום $-2 \leq x \leq 2$ את גרף הפונקציה $g(x)$.
 הנח שבתחום הנ"ל יש לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד.

13. גרף הפונקציה $y = \frac{4x+a}{x^2+2}$ חותך את הצירים בשתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
- א. מצא את ערך הפרמטר a ($a < 0$).
- ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
- ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. הפונקציה הנתונה $f(x)$ היא נגזרת של פונקציה אחרת $g(x)$, כלומר $g'(x) = f(x)$.
- (1) מצא את שיעור ה- x של הנקודה שבה לפונקציה $g(x)$ יש קיצון.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

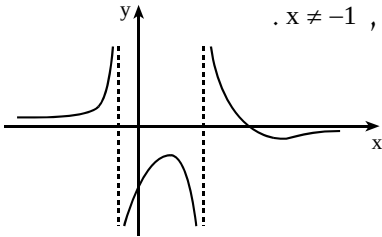
14. נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{x^2+2x+b^2}$ ($b > 1$).
- א. הבע באמצעות b את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ב. מצא את b אם ערך הפונקציה בנקודת המקסימום שלה הוא $\frac{1}{8}$.

15. נתונה הפונקציה $y = \frac{(x-a)^2}{x^2+5}$ ($a > 0$).
- א. הבע באמצעות a : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם הצירים. (3) אסימפטוטות מקבילות לצירים. (4) נקודות קיצון. (5) תחומי עלייה וירידה.
- ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 + \frac{ax^2+4}{x^2-b^2}$ ($b > 0, a > 0$).
- א. בטא בעזרת a ו- b את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$.
- ב. בטא בעזרת a ו- b את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. עבור אילו ערכים של b מתקיים: $f(0) < 0$?
- ד. נתון: $f(0) < 0$. תאר סקיצה של גרף הפונקציה.

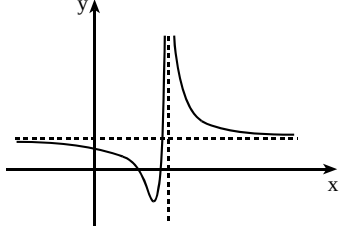
תשובות:

1. א. $a = -2$, $b = 4$. ב. תחום הגדרה: $x \neq -1$, $x \neq 4$.
 נקודות חיתוך: $(0; -4)$, $(8; 0)$.
 אסימפטוטות: $x = -1$, $x = 4$, $y = 0$.
 נקודות קיצון: $(2; -2)$ מקסימום, $(14; -0.08)$ מינימום.
 עלייה: $x > 14$ או $-1 < x < 2$ או $x < -1$.
 ירידה: $4 < x < 14$ או $2 < x < 4$. ד. 23.04.

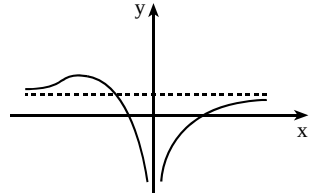


2. א. 1.6. ב. $x = -1$, $x = 1$. ג. $(2; 6.4)$ מינימום, $(-2; -6.4)$ מקסימום.
 ד. שלושה.

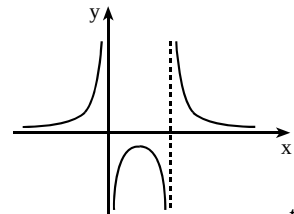
3. א. 2. ב. $x \neq 4$. ג. $(3.5; -2)$ מינימום.
 ד. $(0; 1\frac{1}{16})$, $(3.71; 0)$, $(2.29; 0)$. ו. 7.



4. א. $m = 2$. ב. תחום הגדרה: $x \neq 0$.
 נקודות קיצון: $(-4; 1\frac{1}{8})$ מקסימום.
 עלייה: $x > 0$ או $x < -4$, ירידה: $-4 < x < 0$.
 נקודות חיתוך: $(2; 0)$, $(-1; 0)$.
 אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 1$.
 ד. (1) $k = 1$ או $k = 1\frac{1}{8}$. (2) $k < 1\frac{1}{8}$, $k \neq 1$. (3) $k > 1\frac{1}{8}$.



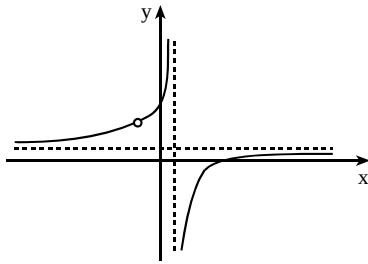
5. א. 1. ב. תחום הגדרה: $x \neq 1$, $x \neq 0$.
 נקודות קיצון: $(\frac{1}{2}; -8)$ מקסימום.
 עלייה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x < 0$; ירידה: $x > 1$.
 או $\frac{1}{2} < x < 1$. נקודות חיתוך: אין.
 אסימפטוטות: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.
 ד. (1) $t > 0$ או $t < -8$. (2) $-8 < t \leq 0$. (3) $t = -8$.



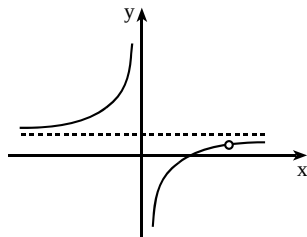
6. א. 4. ב. $\frac{1}{4}$. ג. $y = \frac{1}{16}$.

7. א. $x \neq 3$. ב. $k < 3$. ג. 1.

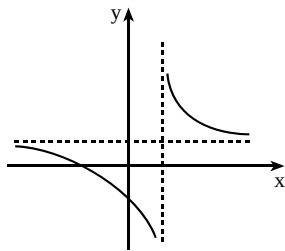
8. ב. (1;2) מקסימום, (-1;-2) מינימום.



9. א. $x \neq -1, x \neq 1$. ב. אין.
ג. עלייה: $x > 1$ או $-1 < x < 1$ או $x < -1$;
ירידה: אין.
ד. (0;5), (5;0).
ה. $y = 1, x = 1$.

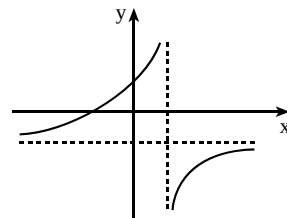


10. א. $x \neq 5, x \neq 0$. ב. אין.
ג. עלייה: $x > 5$ או $0 < x < 5$ או $x < 0$;
ירידה: אין.
ד. (2;0).
ה. $y = \frac{1}{3}, x = 0$.

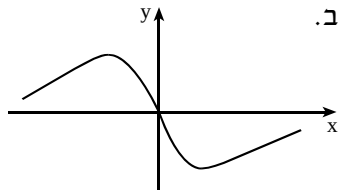


ב.

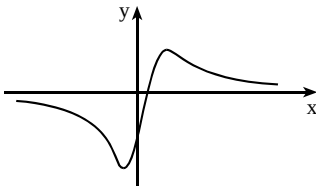
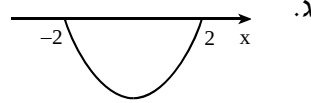
11. א. (1) $x \neq 4$.
(2) אין.
(3) עלייה: אין, ירידה: $x > 4$ או $x < 4$.
(4) (0;-1.25), (-2.5;0).
(5) $y = 2, x = 4$.



ג.

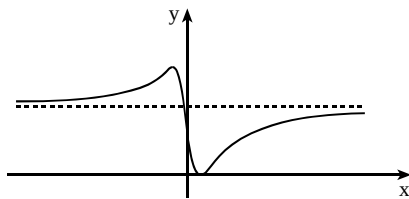


12. א. (1) כל x .
 ב. (2) $(-2; 2)$ מקסימום, $(2; -2)$ מינימום.
 ג. (3) עלייה: $x < -2$ או $x > 2$,
 ירידה: $-2 < x < 2$.
 ד. (4) $(0; 0)$, (5) $y = 0$.

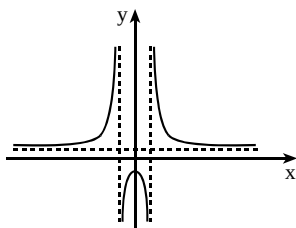


13. א. -2 . ב. תחום הגדרה: כל x .
 ג. נקודות חיתוך: $(0; -1)$, $(\frac{1}{2}; 0)$.
 ד. אסימפטוטות: $y = 0$.
 נקודות קיצון: $(2; 1)$ מקסימום,
 $(-1; -2)$ מינימום. עלייה: $-1 < x < 2$,
 ירידה: $x < -1$ או $x > 2$.
 ד. (1) $\frac{1}{2}$. (2) עלייה: $x > \frac{1}{2}$; ירידה: $x < \frac{1}{2}$.

14. א. $(b; \frac{1}{2b+2})$ מקסימום, $(-b; \frac{-1}{2b-2})$ מינימום. ב. 3.



15. א. (1) כל x .
 ב. (2) $(a; 0)$, $(0; \frac{a^2}{5})$.
 ג. (3) $y = 1$.
 ד. (4) $(a; 0)$ מינימום,
 מקסימום $(-\frac{5}{a}; \frac{a^2+5}{5})$.
 (5) עלייה: $x > a$ או $x < -\frac{5}{a}$.
 ירידה: $-\frac{5}{a} < x < a$.



16. א. $y = a + 2$, $x = -b$, $x = b$.
 ב. עלייה: $-b < x < 0$ או $x < -b$.
 ירידה: $0 < x < b$ או $x > b$.
 ג. $-\sqrt{2} < b < 0$ או $0 < b < \sqrt{2}$.